ческими со сдвоенными фокусами A_3 и M соответственно.3)Торсы прямолинейной конгруэнции (A_0M) соответствуют сдвоенным торсам конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2).4)Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) гармонически разделяют координатную сеть на поверхности (ℓ) в точке A_3.

Найдено уравнение квадрики Ли поверхности (A_0), которое имеет вид:

$$F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0.$$

Семейство квадрик Ли поверхности (A_0) является однопараметрическим.

Построена ассоциированная с конгруэнцией K_1 конгруэнция коник C ,являющихся линиями пересечения квадрик F с координатными плоскостями $(A_1A_2A_3)$.Коника C определяется уравнениями

$$x^1x^2 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0\,, \quad x^0 = 0\,.$$

Найдена система уравнений для определения фокальных точек конгруэнции коник C :

$$(x^1 - x^2)^2(x^2 - \ell x^3) = 0\,, \quad x^0 = 0\,,$$
$$x^1x^2 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0\,.$$

Т е о р е м а 2. Конгруэнция коник C имеет три двукратных фокуса,два из которых являются точками пересечения коники C с прямой ℓ ,а третий совпадает с точкой A_1 .

Исследованы условия расслоения от конгруэнции коник C к различным линейчатым многообразиям.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция коник C расслояема к линейчатой поверхности (A_0A_1) и к прямолинейной конгруэнции (A_0A_2).

Библиографический список

1.М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве|| Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвузовский темат.сб.науч.тр.| Калинингр.ун-т.Вып.3.С.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ОБРАЗАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П.С о п и н а

В n-мерном аффинном пространстве рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие (конгруэнция) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик.Доказано,что для каждой квадрики $Q_{n-1} \in V_{n-1}$ существует инвариантное $(n-2)$-мерное подпространство,принадлежащее касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров.Дана геометрическая характеристика этому подпространству.

Отнесем конгруэнцию V_{n-1} к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n})$, где A -центр гиперквадрики,векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,k=\overline{1,n-1})$ лежат в касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров (A),а вектор $\bar{e}_n$ направлен по направлению,сопряженному этой гиперплоскости относительно квадрики Q_{n-1}.

Конгруэнции V_{n-1} гиперквадрик Q_{n-1} определяются системой уравнений Пфаффа [1]:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta,i}\,\omega^i\,, \quad \omega^n = 0\,, \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}$ -коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1} ,а ω^α, ω^β_α — компоненты деривационных формул репера, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства: $\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta$, $\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma$.

Из уравнений (1.6) [1] следует,что геометрический объект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет гиперквадрику Q_{n-1}.Обозначим $b_i = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta,i}$. Система величин $\{b_i\}$ образует геометрический объект [2],который определяет инвариантную $(n-2)$-мерную плоскость

$$b_i x^i = 0\,, \quad x^n = 0\,, \tag{2}$$

лежащую в касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров (A). Найдем ее геометрическую интерпретацию.

Пусть $R(Q)$ -пространство гиперквадрик, аффинно-эквивалентных гиперквадрике Q, и $\mathcal{D}$ -область в $R(Q)$, содержащая Q. Покажем, что при указанном Q на $\mathcal{D}$ инвариантно определяется числовая функция $A(Q^*)$, $Q^* \in \mathcal{D}$ и дадим ее геометрическую характеристику.

Пусть гиперквадрика Q^* задается уравнением

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2\tilde{a}_\alpha x^\alpha - 1 = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим отображение $\mathcal{L}: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ [3], которое гиперквадрике Q^* ставит в соответствие гиперквадрику $\mathcal{L}(Q^*)$:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 1 = 0. \tag{4}$$

Геометрически отображение $\mathcal{L}$ может интерпретироваться следующим образом. Пусть $\tilde{Q}^*$ - гиперквадрика, симметричная Q^* относительно начала координат, а Q^*_0 -гиперквадрика, полученная из Q^* параллельным переносом, при котором центр Q^* переходит в начало координат. Пересечение $\tilde{Q}^* \cap Q^*$ представляет собой квадратичный элемент, $\mathcal{L}(Q^*)$ является гиперквадрикой, гомотетичной Q^*_0 относительно начала координат и содержащей квадратичный элемент $\tilde{Q}^* \cap Q^*$.

Рассмотрим аффинное преобразование g пространства A_n, которое оставляет неподвижным центр гиперквадрики Q. В репере R оно определяется формулами

$$\tilde{x}^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta. \tag{5}$$

Если гиперквадрика (4) является образом гиперквадрики Q при преобразовании g, то выполняются условия:

$$a_{\alpha\beta} = A^\xi_\alpha A^\eta_\beta \tilde{a}_{\xi\eta}, \tag{6}$$

$$A \overset{def}{=} \det [A^\beta_\alpha]. \tag{7}$$

Из (6) следует

$$A^2 = \frac{\det a_{\alpha\beta}}{\det \tilde{a}_{\alpha\beta}}. \tag{8}$$

Итак, пусть при указанной Q дана произвольная $Q^* \in \mathcal{D}$. Поставим в соответствие гиперквадрике Q^* число $A(Q^*)$, являющееся определителем любого аффинного преобразования g такого, что $g(Q) = \mathcal{L}(Q^*)$. Из (8) следует, что число $A(Q^*)$ не зависит от выбора g и целиком определяется уравнениями гиперквадрик Q и Q^*. Известно, что определитель матрицы $[A^\beta_\alpha]$ центроаффинного преобразования g является аффинным инвариантом и геометрически может интерпретироваться как относительный объем любого параллелепипеда V по отношению к параллелепипеду $g^{-1}(V)$.

Пусть разложение координат A^α_β элемента g центроаффинной группы в окрестности единичного элемента по степеням групповых параметров имеет вид

$$A^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha + \varepsilon^\beta_\alpha + \langle 2 \rangle, \tag{9}$$

где $\langle 2 \rangle$ означает совокупность членов порядка малости $p \geqslant 2$. Тогда, если $[B^\beta_\alpha]$ -матрица, обратная к $[A^\beta_\alpha]$:

$$B^\gamma_\alpha A^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha, \quad A^\gamma_\alpha B^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha, \tag{10}$$

то для ее компонент получаем

$$B^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - \varepsilon^\beta_\alpha + \langle 2 \rangle. \tag{11}$$

Для функции $A = \det [A^\beta_\alpha]$ имеем

$$A = 1 + \varepsilon^\alpha_\alpha + \langle 2 \rangle, \tag{12}$$

откуда

$$B = \det [B^\beta_\alpha] = 1 - \varepsilon^\alpha_\alpha + \langle 2 \rangle. \tag{13}$$

Для координат $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ гиперквадрики Q^* имеем

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \nabla a_{\alpha\beta} + \langle 2 \rangle. \tag{14}$$

С другой стороны, из (6) получаем

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = B^\xi_\alpha B^\eta_\beta a_{\xi\eta} \tag{15}$$

или, с учетом (9),

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\,\varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} + \langle 2 \rangle . \qquad (16)$$

Из (14) и (16) имеем

$$\nabla a_{\alpha\beta} = -2\,\varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} . \qquad (17)$$

Таким образом, на многообразии V_{n-1} имеем

$$b_i \omega^i = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta,i}\, \omega^i = a^{\alpha\beta} \nabla a_{\alpha\beta} = -2 a^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma}_{(\alpha}\, a_{\beta)\gamma} = -2\,\varepsilon^{\alpha}_{\alpha} , \qquad (18)$$

откуда и из (12) при $\omega^n = 0$ получаем

$$A = 1 - \tfrac{1}{2} b_i \omega^i + \langle 2 \rangle . \qquad (19)$$

Отсюда возникает геометрическая интерпретация $(n-2)$-мерной плоскости α_{n-2}. Она является касательным подпространством к поверхности уровня функции $A(Q^*)/V_{n-1}$.

Библиографический список

1. С о п и н а Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.научн.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.105-110.

2. С о п и н а Е.П. О полях геометрических объектов на многообразии V_{n-1} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч.тр./ Калининградский ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.93-95.

3. А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p, q) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.17 1986

УДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ ФИГУР В МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.Н.Х у д е н к о

В четырехмерном проективном пространстве P_4 рассматриваются пары трехпараметрических семейств (конгруэнций), образованных коникой C и двумерной плоскостью S - пары (C,S).

На многомерный случай обобщено понятие расслоения от конгруэнции коник C к конгруэнции плоскостей, введенное в [1] для трехмерного проективного пространства.

1. При надлежащем выборе проективного репера [2] локальная коника $C \in (C,S) \subset P_4$ будет определяться системой уравнений

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^a = 0, \qquad (1)$$

а конгруэнция (C) коник - системой уравнений Пфаффа:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega^{\alpha}_{a} = M^{\alpha\beta}_{a}\,\omega_{\beta}, \quad \omega^{j}_{i} = M^{j\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{5}_{4} = M^{5\alpha}_{4}\,\omega_{\alpha}, \\ &\omega^{3}_{i} = M^{3\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{i}_{3} = M^{i\alpha}_{3}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{4}_{5} = M^{4\alpha}_{5}\,\omega_{\alpha}, \\ &\omega^{4}_{3} = M^{4\alpha}_{3}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{4}_{i} = M^{4\alpha}_{i}\,\omega_{\alpha}, \quad \omega^{1}_{1} + \omega^{2}_{2} - 2\omega^{3}_{3} = M^{1\alpha}_{1}\,\omega_{\alpha}, \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

$$(\alpha,\beta = \overline{1,3}\,; \quad i,j = \overline{1,2}\,; \quad i \neq j\,, \quad a = \overline{4,5}\,).$$

Будем называть пару (C,S) расслояемой от конгруэнции коник C к конгруэнции ассоциированных двумерных плоскостей [2], если к конике C можно присоединить однопараметрическое семейство $\mathcal{F}_{\sigma}$ поверхностей, такое, что касательная гиперплоскость к каждой поверхности $\mathcal{F}_{\sigma}$ семейства, построенная в точке ее пересечения с коникой